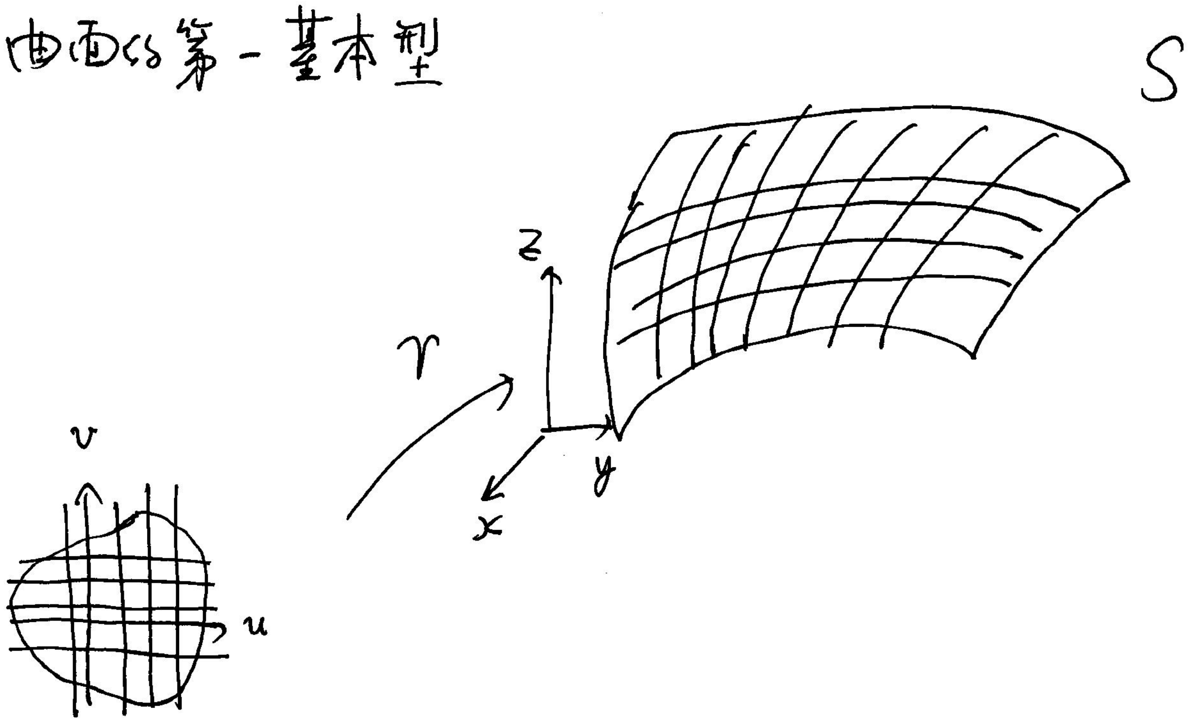
§4. 曲面的第一基本型



研究曲面的弯曲 自然应该通过研究曲面上曲线的弯曲.

我们的第一个目标是表达曲面的"弧长微元".

回忆:

$$\gamma : \overset{t}{(a,b)} \longrightarrow C \subset \mathbb{R}^3$$

弧长:

$$S(t_0) = \int_a^{t_0} |\gamma'(t)|\, dt$$

得到表达式:

$$(ds)^2 = \cancel{\frac{dx}{dt}}\left((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2\right)(dt)^2$$

($\uparrow$ 同时除以 dt

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$)

式
$$(ds)^2 = \langle \dot r(t), \dot r(t)\rangle (dt)^2 \qquad (*)$$

作为自然推广，她们有：

设 $r: \overset{(u,v)}{U} \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ 为曲面.

令 $E = \langle r_u, r_u \rangle$,

$F = \langle r_u, r_v \rangle = \langle r_v, r_u \rangle$

$G = \langle r_v, r_v \rangle$

并令

$$\underline{\mathrm{I}} = (ds)^2 = E(du)^2 + 2F\cdot du\cdot dv + G(dv)^2$$

$$= (du, dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

（第一基本型），E, F, G 为 (u,v) 的光滑函数.

几何意义即 S 上曲线弧长微元之平方：

考虑:
$$\begin{tikzcd} \overset{t}{(a,b)} \arrow[r, "f"] \arrow[drr, bend right] & U \arrow[r, "r"] & S \subset \mathbb{R}^3 \\ & & C \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

$\tilde{\gamma} \triangleq \gamma \circ f : (a,b) \longrightarrow C \subset \mathbb{R}^3$ 为落在 S 上之曲线.

设参数列:

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot \gamma_u + \frac{dv}{dt} \cdot \gamma_v$$

(这里 $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ 表示~~映射~~ f 的 u, v 分量为 t 的求导)

故: $\overset{\text{由(*)式可得:}}{\frown}$ $(ds)^2 = \langle \dot{\tilde{\gamma}}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t) \rangle (dt)^2$

$$= \langle \dot{u} \cdot \gamma_u + \dot{v} \cdot \gamma_v, \dot{u}\gamma_u + \dot{v}\gamma_v \rangle (dt)^2$$

$$= \langle \gamma_u, \gamma_u \rangle \cdot (\dot{u})^2 (dt)^2 +$$

$$2 \langle \gamma_u, \gamma_v \rangle \dot{u} \cdot \dot{v} \, (dt)^2$$

$$+$$

$$\langle \gamma_v, \gamma_v \rangle (\dot{v})^2 (dt)^2$$

$$\overset{\text{形式}}{=\!=} \langle \gamma_u, \gamma_u \rangle (du)^2 + 2 \langle \gamma_u, \gamma_v \rangle du \cdot dv$$

$$+ \langle \gamma_v, \gamma_v \rangle (dv)^2$$

更形式的

$$\begin{cases} r_u = (x_u, y_u, z_u), \quad r_v = (x_v, y_v, z_v) \\ dx = x_u\,du + x_v\,dv \\ dy = y_u\,du + y_v\,dv, \\ dz = z_u\,du + z_v\,dv \end{cases} \quad dr = (dx, dy, dz)$$

$$\Rightarrow (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \langle dr, dr \rangle$$

故形式上，无论是曲线与曲面，均有等式：

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \langle dr, dr \rangle$$

$$= dt \cdot \overset{\circ}{\wedge}(\ \ )_{1\times 1} \cdot dt \qquad \text{曲线情形}$$

$$= (du, dv) \overset{\circ}{\wedge}\begin{pmatrix} E, & F \\ F. & G \end{pmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \qquad \text{曲面情形}$$

命题：(1) 对任意的参数化，矩阵

$$\begin{pmatrix} E(u,v), & F(u,v) \\ F(u,v), & G(u,v) \end{pmatrix} > 0, \quad \forall u, v \in U.$$

(2) 曲面的第一基本型与参数化无关，即：

设 $r': \underset{(u',v')}{U'} \longrightarrow S$ 为另一参数化，则

~~五~~ 即 $(du, dv)\begin{pmatrix} E(u,v), & F(u,v) \\ F(u,v), & G(u,v) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$

$= (du', dv')\begin{pmatrix} E'(u',v'), & F'(u',v') \\ F'(u',v'), & G'(u',v') \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du' \\ dv' \end{pmatrix}$.

证明：(1) 利用线代中命题：

设 $(V_{\mathbb{R}}, \langle\ ,\ \rangle)$ 为内积空间，$\dim_{\mathbb{R}} V = n$

$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 为 V 中一组基，设

$A = (a_{ij}) = (\langle v_i, v_j \rangle)$，~~而~~，则

A的任意主对角子矩阵均为正定对称阵。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

由曲面定义知：

$\forall (u,v)\in U$, $\{\overset{e_1}{\overset{\parallel}{r_u}}, \overset{e_2}{\overset{\parallel}{r_v}}, \overset{e_3}{\overset{\parallel}{r_u\times r_v}}\}$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基. 而

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\langle r_u, r_u\rangle, & \langle r_u, r_v\rangle \\ \langle r_v, r_u\rangle, & \langle r_v, r_v\rangle\end{matrix}} & \begin{matrix}\langle r_u, e_3\rangle \\ \langle r_v, e_3\rangle\end{matrix} \\ \begin{matrix}\langle e_3, r_u\rangle, & \langle e_3, r_v\rangle,\end{matrix} & \langle e_3, e_3\rangle \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} E, & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

故(1)成立.

(2) 设一: $\varphi:\ U' \longrightarrow U$ 为参数变换.

$$(u',v') \longmapsto (u,v)$$

则有

$$\begin{pmatrix} r'_{u'} \\ r'_{v'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial u'} \\ \frac{\partial u}{\partial v'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix}}_{\overset{\parallel\triangle}{J}} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} \qquad (**)$$

(Jacobi - 矩阵).

则有

$$\begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J^T$$

另一方面:

$$(du, dv) = (du', dv') \cdot J$$

故
$$(du', dv')\begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du' \\ dv' \end{pmatrix}$$

$$= \left[(du', dv')\, J\right]\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\left[J^T\begin{pmatrix} du' \\ dv' \end{pmatrix}\right]$$

$$= (du, dv)\begin{pmatrix} E, & F \\ F, & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

#

记之:

$$I = \langle dr, dr\rangle \quad , \text{ 而 } \boxed{dr' = dr} \quad (***)$$

故 $\langle dr, dr\rangle = \langle dr', dr'\rangle$

#

(***):

$$dr' = (dx', dy', dz')$$

例如:

$$\begin{aligned} dx' &= x_{u'}du' + x_{v'}dv' \\ &= (x_{u'}, x_{v'})\begin{pmatrix} du' \\ dv' \end{pmatrix} \\ &= (x_{u'}, x_{v'})\left[J\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}\right] \\ &= \left[(x_{u'}, x_{v'})\cdot J\right]\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \\ &= (x_u, x_v)\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#

命题: 曲面的第一基本型在 E^3 的合同变换下不变. 即

令: $r = r(u, v)$ 为一曲面, $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 为合同变换,

$$v \longmapsto v\cdot A + P$$

$$A \in O(3)$$

令 $\tilde{r} = T\circ r$. 则

$$I_{\tilde{r}} = I_r$$

证: $\tilde{r}_u = r_u\cdot A$, $\tilde{r}_v = r_v\cdot A$

故 $\tilde{E} = \langle \tilde{r}_u, \tilde{r}_u \rangle$

$= \langle r_u \cdot A, r_u \cdot A \rangle$

$= \langle r_u, r_u \rangle = E.$

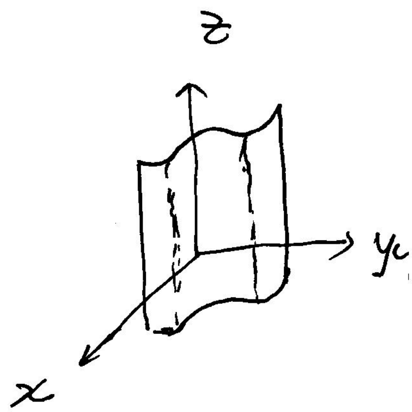
同理证明 $\tilde{F} = F$, $\tilde{G} = G$. #

例子：(1) 平面：

$r(u,v) = (u, v, c)$ 常数

则 $I = (du)^2 + (dv)^2$

(2) 柱面：



$r(u,v) = (x(u), y(u), v)$，其中

$(x(u), y(u))$ 为平面中曲线.

则 $I = (du)^2 + (dv)^2$

(3) 球面. (半径为 a)

(i) 按经纬参数化

$r(\theta, \varphi) = (a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta)$

$I(\theta, \varphi) = a^2[(d\theta)^2 + \cos^2\theta(d\varphi)^2]$

(ii) (球极投影参数化)

$$r(u,v) = \left(\frac{2a^2 u}{a^2+u^2+v^2},\ \frac{2a^2 v}{a^2+u^2+v^2},\ a \cdot \frac{u^2+v^2-a^2}{a^2+u^2+v^2} \right)$$

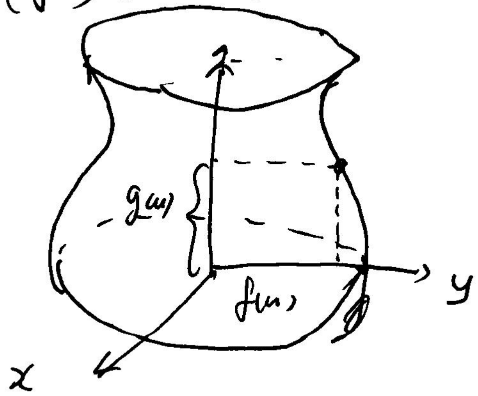
$$\mathrm{I}(u,v) = \frac{4}{\left(1+\frac{1}{a^2}(u^2+v^2)\right)^2}\left((du)^2+(dv)^2\right)$$

(4) 旋转曲面

$$r(u,v) = (f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u))$$

$$\mathrm{I}(u,v) = \left[(f')^2+(g')^2\right](du)^2 + (f^2)(dv)^2$$

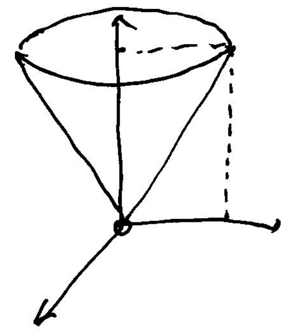
(yz-平面给定曲线，绕z轴旋转)



特别的:

$f(u) = u$

$g(u) = k \cdot u, \quad k = \text{const}$



$$\mathrm{I}(u,v) = (1+k^2)(du)^2 + u^2(dv)^2$$

~~可重新参数~~化：

§5. 曲面的第二基本型

设 $r = r(u,v)$ 为曲面.

回忆：1^{st}- fund. form

$$I(u,v) = E(u,v)(du)^2 + 2F(u,v)du\,dv + G(u,v)(dv)^2$$

$$= (du, dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

其中，$E = \langle r_u, r_u\rangle$，$F = \langle r_u, r_v\rangle$，$G = \langle r_v, r_v\rangle$

回顾：曲线情形：$r = r(t)$ 为曲线

1^{st}- fund. form $= |\dot{r}(t)|^2$

$$\overset{\|}{I(t)} = \langle \dot{r}(t), \dot{r}(t)\rangle (dt)^2$$

我们知道，用弧长参数 s，重新参数化 r，则有

$$I(s) = \underset{\approx}{1}(ds)^2 = (|\dot{r}(t)|dt)^2 = |\dot{r}(t)|^2(dt)^2 = I(t)$$

也就是说：在曲线情形，我们总有一个参数化，使得第一基本型的系数矩阵 1×1 正定矩阵为 (1)..

类似地，我们推出

问题：在曲面情形，是否存在一个参数化使得 1st fund. form 的 2×2 正定对称矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$？

事实：(1) 单位球面在球坐标下有

$$\mathrm{I}(\theta,\varphi) = (d\theta)^2 + \cos^2\theta\,(d\varphi)^2$$

(2) 锥面

$$r(u,v) = \left(\tfrac{1}{2}u\cos(2v),\ \tfrac{1}{2}u\sin(2v),\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}u\right) \text{ 有}$$

$$\mathrm{I}(u,v) = (du)^2 + u^2(dv)^2.$$

那么：对上述问题：对单位球面答案是否定的；
对锥面答案是肯定的！

上述问题可归结为解方程组：

$$\varphi:\ (u,v) \longrightarrow (\tilde{u},\ \tilde{v})$$
$$\tilde{u} = f(u,v),\quad \tilde{v} = g(u,v)$$

求解 C^∞ 函数 $f(u,v)$, $g(u,v)$，使得

对 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}$ 满足

$$J\cdot J^T=\begin{cases}\begin{pmatrix}1&0\\0&(\cdot)^2\end{pmatrix} & \text{曲面情形；}\\[2ex] \begin{pmatrix}1&0\\0&u^2\end{pmatrix} & \text{锥面情形。}\end{cases}$$

但这并非一个显然的问题。以后我们将从另外一个角度来看这个问题。（曲面间的等距变换）

总结起来：相对于曲线情形，曲面情形时并非存在一个象"弧长参数"一样的特别参数，使得第一基本型表达为欧氏平面的表达

即 $(du, dv)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}=(du)^2+(dv)^2$.

虽然没有"弧长参数"（这是由高斯的绝妙定理告诉我们的），但是我们可以继续研究曲面的"弯曲"。这里有如下一个研究：

习题二(2). $\gamma(t)=(x(t), y(t))$. 则曲率表达为

$$k(t)=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{\{(x')^2+(y')^2\}^{3/2}}$$

令 $e_1(t)=\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$, 则 $e_2(t)$ = 与 $e_1(t)$ 垂直的单位方向，且 $\{e_1(t), e_2(t)\}$ 正交标架.

即

$$e_1(t) = \frac{1}{\{\dot{x}^2+\dot{y}^2\}^{1/2}} (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

$$e_2(t) = \frac{1}{\{\dot{x}^2+\dot{y}^2\}^{1/2}} (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$$

则 $\dot{e}_1(t) \perp e_2(t)$，即：

$$\dot{e}_1(t) = \tilde{k}(t)\, e_2(t). \iff \tilde{k}(t) = \langle \dot{e}_1(t), e_2(t) \rangle = \frac{1}{|\dot{r}(t)|} \langle \ddot{r}(t), e_2(t) \rangle$$

则曲率

$$k(t) = \tilde{k}(t) \Big/ |\dot{r}(t)| = \frac{\langle \ddot{r}(t), e_2(t) \rangle}{|\dot{r}(t)|^2}$$

$\leftarrow$ 2nd- fund. form

1st- fund. form.

定义：令 $r = r(u,v)$ 为曲面，令 $n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$ 为单位法向量.

令 $L(u,v) = \langle r_{uu}, n \rangle$

$M(u,v) = \langle r_{uv}, n \rangle \quad (= \langle r_{vu}, n \rangle)$

$N(u,v) = \langle r_{vv}, n \rangle$

$$\mathrm{II} = \mathrm{II}(u,v) = L(u,v)(du)^2 + 2M\, du\, dv + N(dv)^2$$

为 $r(u,v)$ 的第二基本型 (2nd- fund. form)

Ⅱ的微分形式表达:

回忆: $\mathrm{I} = \langle dr, dr \rangle$.

命题: $\mathrm{II} = -\langle dr, dn \rangle$.

证明: $dr = r_u du + r_v dv$

$dn = n_u du + n_v dv$

$$-\langle dr, dn \rangle = -\langle r_u du + r_v dv, n_u du + n_v dv \rangle$$

$$= (-\langle r_u, n_u \rangle)(du)^2 +$$

$$(-\langle r_u, n_u \rangle - \langle r_v, n_u \rangle)\, du \cdot dv +$$

$$(-\langle r_v, n_v \rangle)(dv)^2$$

注意到: $\langle r_u, n \rangle = \langle r_v, n \rangle = 0$

$$\Rightarrow \overbrace{\langle r_{uu}, n \rangle}^{L} + \langle r_u, n_u \rangle = 0 \Rightarrow L = -\langle r_u, n_u \rangle$$

$$\left.\begin{aligned} &\overbrace{\langle r_{uv}, n \rangle}^{M} + \langle r_u, n_v \rangle = 0 \\ &\overbrace{\langle r_{vu}, n \rangle}^{M} + \langle r_v, n_u \rangle = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow M = -\langle r_u, n_v \rangle = -\langle r_v, n_u \rangle$$

$$\overbrace{\langle r_{vv}, n \rangle}^{N} + \langle r_v, n_v \rangle = 0 \Rightarrow N = -\langle r_v, n_v \rangle.$$

#

$\mathrm{II}(u,v)$ 的参数变换公式:

令 $r = r(u,v) = r(\tilde{u},\tilde{v})$ 为曲面的两参数化.

令 $\varphi: (\tilde{u},\tilde{v}) \longrightarrow (u,v)$ 为参数变换

记 $J = J(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \end{pmatrix}$ 为 Jacobi 矩阵.

命题: 记 $\begin{pmatrix} \tilde{L} & \tilde{M} \\ \tilde{M} & \tilde{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\tilde{u},\tilde{v}), & M(\tilde{u},\tilde{v}) \\ M(\tilde{u},\tilde{v}), & N(\tilde{u},\tilde{v}) \end{pmatrix}$. 则

$$\begin{pmatrix} \tilde{L} & \tilde{M} \\ \tilde{M} & \tilde{N} \end{pmatrix} = \mathrm{Sgn}(\det(J)) \cdot J \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot J^T.$$

证明: $\tilde{n}(\tilde{u},\tilde{v}) = \mathrm{Sgn}(\det(J)) \cdot n(u,v)$

故 $\tilde{\mathrm{II}} = -\langle d\tilde{r}, d\tilde{n} \rangle$

$= -\mathrm{Sgn}(\det(J)) \langle dr, dn \rangle = -\mathrm{Sgn}(\det(J))\, \mathrm{II}$

再利用 $(du, dv) = (d\tilde{u}, d\tilde{v}) \cdot J$. 即可得命题.

#.